PEA 法による DGE モデルの数値解析（計算経済学の研究その７）

Numerical Analysis of DGE Model by Parameterized Expectation Method

釜　国男
Kunio KAMA

１．はじめに

動学的一般均衡（DGE）モデルは，マクロ経済学の基本的枠組みとして広く受け入れられている．DGE モデルの出現で景気変動の分析は一変した．しかし特殊なケースを除いてモデルを解析的に解くことはできない．このため数値計算を行って近似解を求める方法が使われる．代表的方法として関数反復法と線形近似法がある．しかし，これらの方法は一部のモデルにしか使えない．関数反復法には状態変数が増えると計算量が指数関数的に増加するという問題がある．いわゆる「次元の呪い」である．ソフトとハードの両面で計算能力は急速に高まっているが，今後も関数反復法は簡単なモデルにしか適用できないであろう．線形近似法は計算が簡単で複雑なモデルにも適用できるが，線形性を仮定している点で限界がある．名目金利に対するゼロ制約のように，経済変数には制約条件がつくことが多い．通常は無視してもとくに問題はないが，制約条件が重要な役割を果たす場合もある．このような場合，線形近似法を使うと重要な論点を見失うおそれがある．

最近，数値計算に伴う様々の問題を克服する方法として Parameterized Expectations Approach（PEA 法）が注目されている[1)]．GDE モデルに解析解がないのは内生変数の期待値を含んでいるからである．一般に動学的確率モデルでは，内生変数の値は状態変数によって決まる．このため条件付き期待値は状態変数の関数となる．問題はこの関数を特定化してパラメータを決定することである．つぎの節で説明するように，PEA 法では不動点アルゴリズムを用いてパラメータを決定する．近似精度はそれほど高くないが，様々の制約条件を考慮することが可能である．また少数の状態変数に限定する必要もない．

最初に PEA 法の基本的な考え方と計算アルゴリズムを説明する．つづいて資産価格決定モデル，最適成長モデル，投資の非負制約を考慮したモデル，消費習慣モデル，および貨幣を含む経済成長モデルに適用してその有効性を検討する．最後に残された技術的な課題を指摘する．

２．基本的アプローチ

PEA の基本的なアプローチは，内生変数の期待値を状態変数の関数として表すことである．一般に DGE モデルはつぎのように表される．

$$g(E_t[\phi(y_{t+1}, x_{t+1}, y_t, x_t)], y_t, x_t, \varepsilon_t)=0 \qquad (1)$$

ここで $g: R^m \times R^{n_y} \times R^{n_x} \times R^{n_e} \to R^{n_y+n_x}$，$\phi: R^{n_y} \times R^{n_x} \times R^{n_y} \times R^{n_x} \to R^m$ の関数である．また y は内生変数，x は状態変数，ε_t は外生変数のイノベーションである．E_t は t 期に利用可能な情報にもとづく数学的期待値である．モデルの構成要素はオイラー方程式，資源制約，外生変数の決定式，市場均衡条件である．期待値は状態変数の関数 $\Phi(x_t:\theta)$ として表される．期待関数を代入すると

$$g(\Phi(x_t:\theta), y_t, x_t, \varepsilon_t)=0 \qquad (2)$$

となる．問題は期待関数のパラメータ θ の決定である．直ぐに思いつくのは誤差の自乗和を最小化することである．つまり

$$\hat{\theta}=\arg\min\|\Phi(x_t:\theta)-E_t[\phi(y_{t+1}, x_{t+1}, y_t, x_t)]\|^2 \qquad (3)$$

となる $\hat{\theta}$ を求める．$\Phi(x_t:\theta)$ の関数形はモデルの構造を考慮して決める．状態変数の多項式がよく使われるが，問題によってはスプライン関数やニューラルネットワークも使われる．実際の計算はつぎの手順で行う．

［ステップ０］　θ に適当な初期値を与えて，十分小さな正数 η とサンプルサイズ T を決める．

［ステップ１］　正規乱数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_T$ を発生させる．

［ステップ２］　モデルを解いて $\{y_t(\theta), x_t(\theta)\}_{t=0}^{T}$ を求める．

［ステップ３］　$\phi(y_{t+1}(\theta), x_{t+1}(\theta), y_t(\theta), x_t(\theta))$ を被説明変数，$\Phi(x_t(\theta):\theta)$ を説明変数として最小自乗法によって θ を推定する．

$$\hat{\theta}=\arg\min\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}\|\phi(y_{t+1}(\theta), x_{t+1}(\theta), y_t(\theta), x_t(\theta))-\Phi(x_t(\theta):\theta)\|^2$$

［ステップ４］　期待係数を

$$\theta^*=\omega\hat{\theta}+(1-\omega)\theta$$

によって更新する．調整係数 ω が小さいと収束しやすくなるが，計算時間は長くなる．モデルが強く非線形でないときは ω は大きくする．

［ステップ５］　$|\theta^*-\theta|<\eta$ ならば計算を終了する．さもなければステップ２へ戻る．

パラメータの推定値は真の値へ収束するとは限らない．Marcet＝Marshall (1994) は，推定値が真の値へ収束するための条件を示している．PEA 法では $\Phi(x_t:\theta)$ の関数形と初期値の選択が決定的に重要である．不適切な関数形を選ぶと，パラメータが発散したり大きな誤差が生じる．初期値の選択ではホモトピー法が有効である[2)]．この場合，解析解が存在するケースから始めて，徐々に問題のケースに近づけて解を求める．もう一つの問題は回帰式の説明変数の選択である．説明変数が多くなると，内部相関で誤差が大きくなったり途中で計算が停止したりする．この場合，少数の説明変数に絞り込んだり直交多項式を使う方法が有効である．

３．資産価格決定モデル

最初に取り上げるのは，ルーカスの資産価格決定モデルである．ルーカスは消費者の効用最大

化行動を仮定して資産価格の決定式を導いた．つまり消費者は将来の期待効用の現在価値

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}$$

を予算制約

$$c_t+p_ts_{t+1}=(d_t+p_t)s_t \tag{4}$$

のもとで最大化する．ここで c_t は消費，s_t は資産ストック，$0<\beta<1$は主観的割引率，p_t は資産価格，d_t は配当である．配当はつぎの式で決定される．

$$d_t=\exp(x_t)d_{t-1} \tag{5}$$

x_t はつぎの１階自己回帰過程にしたがう確率変数である．

$$x_t=(1-\rho)\mu+\rho x_{t-1}+\varepsilon_t,\ |\rho|<1, \varepsilon_t\sim iid.N(0,\sigma^2) \tag{6}$$

効用最大化の一階条件は

$$p_tc_t^{\gamma-1}=\beta E_t[c_{t+1}^{\gamma-1}(p_{t+1}+d_{t+1})]$$

これより

$$p_t=\beta E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma-1}(p_{t+1}+d_{t+1})\right]$$

となる．市場均衡条件 $c_t=d_t$ を代入すると

$$p_t=\beta E_t\left[\left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{\gamma-1}(p_{t+1}+d_{t+1})\right]$$

市場価格と配当の比率を $\nu_t=p_t/d_t$ とすると

$$\nu_t=\beta E_t[\exp(\gamma x_{t+1})(\nu_{t+1}+1)] \tag{7}$$

が成り立つ．右辺に含まれている期待値を関数

$$\Phi(x_t)=\exp(\theta_0+\theta_1x_t+\theta_2x_t^2)$$

で近似する．つまり条件付き期待値は状態変数 x_t と x_t^2 の関数であるとする．問題は期待係数を決定することである．係数を決定するにはモデルのパラメータを設定する必要がある．ここでは Mehra＝Prescott（1985）にしたがって，$\gamma=-1.5$，$\beta=0.95$，$\rho=-0.139$，$\mu=0.0179$，$\sigma=0.0348$ とする．ρ はマイナスで配当の増加率は弱い負の系列相関をもつ．調整係数は $\omega=0.8$，係数の初期値はすべて0.5とする．サンプル数が大きいほど近似精度は高くなるが，計算時間も長くなる．このため20,000個のサンプルを発生させ，収束判定条件は $\eta=10^{-8}$ とした．以上のような条件のもとでアルゴリズムを実行すると，期待関数は

$$\log(\nu_t)=2.5056+0.1816x_t+0.3260x_t^2$$

となる．x_t の係数はプラスで，配当が増加すると価格配当比率は上昇する．$x_t=\mu$ であるとき，ν_t は $\nu^*=\beta\exp(\gamma\mu)/(1-\exp(\gamma\mu))=12.3035$となる．長期定常状態に達すると，$\nu_t$ は ν^* のまわりに分布する．期待関数の形からわかるように，ν_t の分布は正規分布とならない．$\Phi(x_t)$ を線形にすれば正規分布となるが，収束解は得られない．モデルは他の方法でも解けるが，PEA のアルゴリズムは簡単に実行できる点で優れている．

ここでは簡単化のため一種類の資産を仮定したが，資産が複数あるケースに拡張可能である．n 種類の資産があると，資産の価格は

$$p_{j,\,t}=\beta E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma-1}(p_{j,\,t+1}+d_{j,\,t+1})\right]\quad \mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{n}$$

で与えられる．市場均衡条件は $c_t=\sum_{j=1}^{n}d_{jt}$ である．配当の数だけ状態変数は増えて他の方法でモデルを解くのは難しいが，PEA 法を適用すれば近似解が得られる．

4．最適成長モデル

つぎに，数値解析のテストケースとしてよく用いられるラムゼイの最適成長モデルに適用する．このモデルで家計は効用関数

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

を最大化する．企業はつぎの生産関数を用いて消費財と投資財を生産する．

$$y_t=z_tk_t^{\alpha}$$

ここで y_t は生産量，z_t は全要素生産性，k_t は資本ストックである．資本の動きはつぎの式で表される．

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+i_t$$

ここで i_t は粗投資で$0\leq\delta\leq1$は資本減耗率である．財市場の均衡条件は

$$y_t=c_t+i_t$$

である．全要素生産性の変動はつぎの式で表される．

$$\log(z_t)=\rho\log(z_{t-1})+\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\sim iid.\,N(0,\sigma^2)$$

資本の運動式と財市場の均衡条件から

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+z_tk_t^{\alpha}-c_t$$

が成り立つ．家計の問題を解くためにラグランジュ関数

$$L=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\lambda_t(k_{t+1}-z_tk_t^{\alpha}-(1-\delta)k_t+c_t)\right]$$

を定義する．ここで λ_t はラグランジュ乗数である．最適化の１階条件はつぎのようになる．

$$\lambda_t=c_t^{-\gamma}$$
$$\lambda_t=\beta E_t[\lambda_{t+1}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+1-\delta)]$$
$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+z_tk_t^{\alpha}-c_t \tag{8}$$

モデルの状態変数は k_t と z_t であり，二番目の式の期待値をつぎのように表す．

$$\beta E_t[\lambda_{t+1}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+1-\delta)]=\Psi(k_t,z_t)$$

ここで $\Psi(k_t,z_t)$ を $\log(k_t)$ と $\log(z_t)$ の多項式で近似する．

$$\Phi(k_t,z_t)=\exp(\theta_0+\theta_1\log(k_t)+\theta_2\log(z_t)+\theta_3\log(k_t)^2+\theta_4\log(z_t)^2+\theta_5\log(k_t)\log(z_t)) \tag{9}$$

この式に含まれる６個の係数を推定する必要がある．

最初に，解析解がわかっているケースを取り上げる．効用関数を $\log(c_t)$ とし $\delta=1$を仮定すると解析解が存在する．モデルのパラメータは $\gamma=1$，$\beta=0.95$，$\alpha=0.36$，$\rho=0.85$，$\sigma_e=0.01$とする．この場合，資本ストックは

$$k_{t+1}=\left(\frac{\beta B}{1+\beta B}\right)z_t k_t^{\alpha},\ B=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

で与えられる[3)]．また期待関数は

$$\Phi(k_t, z_t)=\exp(\theta_0+\theta_1\log(k_t)+\theta_2\log(z_t))$$

と簡単な式で表される．PEA のアルゴリズムを実行すると，$\theta_0=0.4186$，$\theta_1=-0.3600$，$\theta_2=-1.0000$となる．$c_t=1/\lambda_t$ から消費の決定式は

$$\log(c_t)=-0.4186+0.3600\log(k_t)+\log(z_t)$$

となる．一方，解析解は

$$\log(c_t)=-\log(1+\beta B)+\alpha\log(k_t)+\log(z_t)$$

である．$\alpha=0.36$，$B=0.5471$を代入すると，この式は推定式と完全に一致する．したがって PEA 法によって厳密解が得られる．来期の資本ストックは

$$\log(k_{t+1})=-1.0729+0.3600\log(k_t)+\log(z_t)$$

で与えられる．

つぎにモデルのパラメータを $\gamma=0.8$，$\delta=0.1$に変更する．ホモトピー法のアイデアにもとづいて $\gamma=1$，$\delta=1$から始めてパラメータを少しずつ変化させる．期待係数の初期値には一つ前の値を使用する．この方法を適用するとつぎの消費関数が得られる．

$$\log(c_t)=-\frac{1}{\gamma}(0.6154-0.6622\log(k_t)-0.2692\log(z_t)+0.0565\log(k_t)^2$$
$$+0.0559\log(z_t)^2-0.0475\log(k_t)\log(z_t))$$

この式によると $c_t\cong 0.46k_t^{0.83}$ であり，資本ストックが１％増えると消費は0.83％増加する．近似精度を調べるために，消費に関するオイラー方程式の誤差を計算した．誤差はつぎの式で定義する．

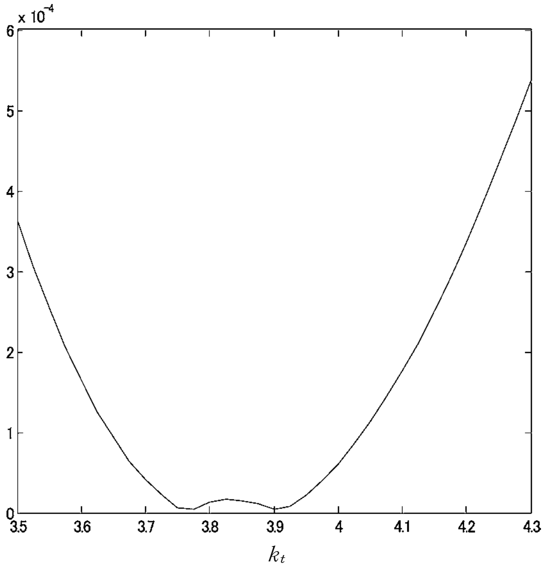
$$E(k)=\left|1-\beta\frac{u'(\hat{C}(F(k)-\hat{C}(k)))F'(F(k)-\hat{C}(k))}{u'(\hat{C}(k))}\right| \tag{10}$$

ここで $\hat{C}(k)$ は消費の近似値で $F(k)=(1-\delta)k+k^{\alpha}$ である．推計したモデルを用いてシミュレーションを行うと，大部分の期間で資本は$3.5\leq k\leq 4.3$となる．図１は消費に関するオイラー方程式の誤差を示している．定常状態の資本ストックを k^* とすると

$$k^*=\left[\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}=3.8219$$

となる．$E(k^*)=1.568\times 10^{-5}$であり，定常状態における消費の誤差はきわめて小さい．ただし，定常状態から離れると誤差は大きくなる．期待係数を求めるときに定常状態に近いデータが大き

図 1 消費に関するオイラー方程式の誤差



なウェイトをしめる．このため k^* の近くで近似精度は高くなると考えられる．

5．投資の非負制約を考慮した成長モデル

標準的成長モデルでは投資に対する非負制約は考慮しない．これは全要素生産性の変動は小さく投資は常に正となると仮定したからである．しかし，この条件は常に満たされるとは限らない．生産性が大きく低下すると投資は負となるかもしれない．この節では投資の非負制約を考慮した成長モデルについて考える．

投資に対する非負制約を考慮して，ラグランジュ関数をつぎのように変更する．

$$L=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\lambda_t(k_{t+1}-z_tk_t^{\alpha}-(1-\delta)k_t+c_t)-\mu_t((1-\delta)k_t-k_{t+1})\right]$$

ここで μ_t は投資に関するラグランジュ乗数である．効用最大化の１階条件は

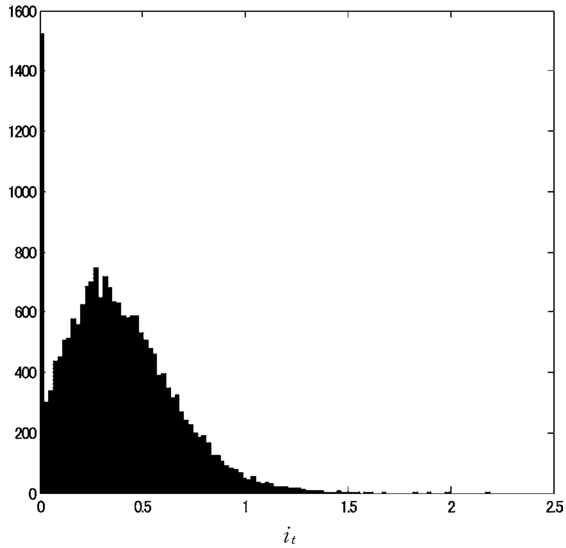
$$\begin{aligned}&c_t^{-\gamma}=\lambda_t\\&\lambda_t=\mu_t+\beta E_t[\lambda_{t+1}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+1-\delta)-\mu_{t+1}(1-\delta)]\\&k_{t+1}=(1-\delta)k_t+z_tk_t^{\alpha}-c_t\\&\mu_t(k_{t+1}-(1-\delta)k_t)=0\\&\mu_t\geq 0\end{aligned}\tag{11}$$

である．投資の非負制約が有効でない場合は $\mu_t=0$ となり，(8)式と変わらない．制約条件が有効であれば $\mu_t>0$ となる．二番目の式に含まれる期待値は k_t と z_t の関数であり

$$\beta E_t[\lambda_{t+1}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+1-\delta)-\mu_{t+1}(1-\delta)]=\Phi(k_t,z_t)$$

と表す．$\Phi(k_t,z_t)$ の関数形は(9)式と同じである．Marcet＝Lorenzoni (1998) にならって，第２節のアルゴリズムを修正する必要がある．つぎの式で投資を求める．

図 2　投資の分布



$$i_t = z_t k_t^{\alpha} - \Phi(k_t, z_t)^{\frac{1}{\gamma}}$$

そして，もし $i_t > 0$ であれば $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$ で $\mu_t = 0$ とする．$i_t \leq 0$ ならば $k_{t+1} = (1-\delta)k_t$，$c_t = zk_t^{\alpha}$，$\mu_t = c_t^{-\gamma} - \Phi(k_t, z_t)$ とする．モデルのパラメータは $\rho = 0.3$，$\sigma_e = 0.2$ とした他は標準的モデルと変わらない．はじめに制約条件を無視して θ_i を計算し初期値として用いた．最終的につぎの関数が得られる．

$$\log\Phi(k_t, z_t) = 0.3539 - 0.2390\log(k_t) - 0.4034\log(z_t) - 0.1231\log(k_t)^2 - 0.1334\log(z_t)^2 + 0.1330\log(k_t)\log(z_t)$$

前節の結果と比較して最後の３つの項の符号が逆転している．他の項は符号は変わらないが数値は大きく変化している．モデルを用いてシミュレーションを行うと，6.8％の期間で投資はゼロとなる．もちろん生産性の変動が大きくなると，投資がゼロとなる期間は増える．投資と資本の関係では，資本ストックが増えると投資は減少し，$k \geq 6.73$ なら投資はゼロとなる．一方，資本が増えると消費は増加する．消費関数には微分不可能な点があり，線形近似すると大きな誤差が発生する．投資の実現値は右に歪んだ分布となる（図２）．制約条件を反映して $i = 0$ で大きくスパイクしている．消費に関するオイラー方程式の誤差は k^* の近くではほとんどゼロとなるが，制約条件が効く領域では誤差は大きくなる．

６．消費習慣モデル

標準的成長モデルでは，今期の効用は今期の消費だけで決まる．しかし消費習慣によって今期だけでなく過去の消費も効用に影響を与える可能性がある．ここでは消費習慣を考慮して効用関数を $U(c_t - \eta c_{t-1})$ と表す．もし $\eta > 0$ であれば今期の消費が増えると来期消費の限界効用は高くなる．消費習慣を考慮するとモデルは複雑になるが，PEA 法を適用すれば近似解が得られる．

家計の効用関数をつぎのように変更する.

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta_t\frac{(c_t-\eta c_{t-1})^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$$

効用最大化の条件はつぎのようになる.

$$\lambda_t=(c_t-\eta c_{t-1})^{-\gamma}-\beta\eta E_t(c_{t+1}-\eta c_t)^{-\gamma}$$
$$\lambda_t=\beta E_t[\lambda_{t+1}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+1-\delta)]$$
$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+z_tk_t^{\alpha}-c_t \quad (12)$$

最初の二つの式から

$$(c_t-\eta c_{t-1})^{-\gamma}=\beta E_t[\eta(c_{t+1}-\eta c_t)^{-\gamma}+((c_{t+1}-\eta c_t)^{-\gamma} -\beta(\eta c_{t+2}-\eta c_{t+1})^{-\gamma})(\alpha c_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+1-\delta)] \quad (13)$$

となる. 右辺は来期変数の期待値であり, これを関数 $\Phi(k_t, z_t, c_{t-1})$ で近似する[4].

$$\Phi(k_t, z_t, c_{t-1})=\exp(\theta_0+\theta_1\log(k_t)+\theta_2\log(z_t)+\theta_3\log(c_{t-1})+\theta_4\log(k_t)^2+\theta_5\log(z_t)^2 +\theta_6\log(c_{t-1})^2+\theta_7\log(k_t)\log(z_t)+\theta_8\log(k_t)\log(c_{t-1}))$$

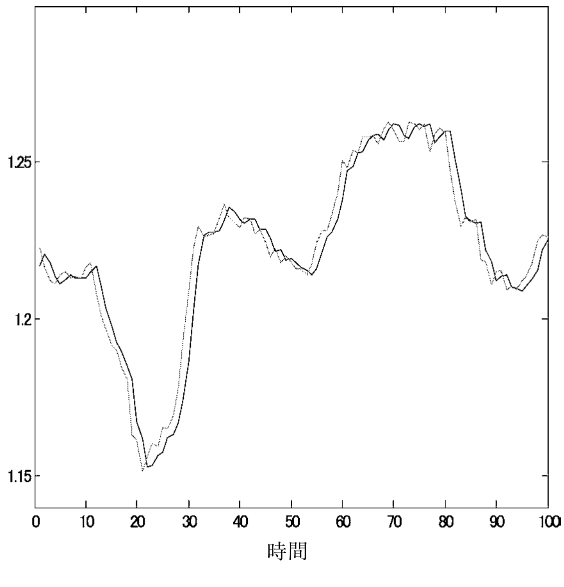
消費習慣のパラメータは $\eta=0.5$とする. 他のパラメータはこれまでと変わらない. 期待係数の推定では第4節で求めた値を初期値とした. サンプル数を $T=20,000$としてアルゴリズムを実行するとつぎの式が得られる.

$$\Phi(k_t, z_t, c_{t-1})=\exp(0.2532+0.7282\log(k_t)-0.1850\log(z_t)-0.4323\log(c_{t-1}) -0.4672\log(k_t)^2+0.7302\log(z_t)^2+0.0622\log(c_{t-1})^2 -0.0242\log(k_t)\log(z_t))$$

消費の決定式は

$$c_t=\Phi(k_t, z_t, c_{t-1})^{\frac{1}{\gamma}}+\eta c_{t-1}$$

図 3 消費のサンプルパス



で与えられる．１期前の消費と今期の消費の間には正の系列相関がある．図３は消費のサンプルパスである．実線は $\eta>0$，破線は $\eta=0$ に対応する．全体的な変動パターンは変わらないが，消費習慣を仮定した系列が先に変化している．これは家計が生産性ショックに直ぐに反応することを意味する．

７．貨幣的成長モデル

リアルビジネスサイクルモデルは，その名の通り実物的ショックを強調する一方で貨幣的要因は無視する．しかし，多くの実証研究によると貨幣と実質変数の間には相関関係がある．Cooley＝Hansen は，この事実を説明するため貨幣を含んだ成長モデルについて研究した．彼らのモデルにおいて貨幣は現金制約を通じて実質効果をもつ．Cooley と Hansen は線形近似法を用いてシミュレーションを行っているが，現金制約があるためこの方法では誤差が発生する．ここでは PEA 法を用いて分析する．

家計は予算制約のもとで生涯効用の期待値

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\log c_t-\gamma h_t)$$

を最大化する．ここで c_t は消費で h_t は労働時間である．予算制約はつぎの式で表される．

$$c_t+k_{t+1}+\frac{m_t}{p_t}=w_th_t+r_tk_t+(1-\delta)k_t+\frac{m_{t-1}+(g_t-1)M_{t-1}}{p_t}$$

ただし m_t/p_t は期末の実質貨幣残高である．政府は $(g_t-1)M_{t-1}$ の移転支払いを行う．貨幣ストックは

$$M_t=g_tM_{t-1}$$

にしたがって増加する．貨幣増加率は

$$\log(g_t)=(1-\rho_g)\log(\mu)+\rho_g\log(g_{t-1})+\varepsilon_t^g,\ \ \varepsilon_t^g\sim iid\ N(0,\sigma_g^2)$$

で与えられる．消費支出に対する現金制約はつぎの式で表される．

$$p_tc_t\leq m_{t-1}+(g_t-1)M_{t-1}$$

ただし $g_t>\beta$ なら等号で成り立つ．企業の生産関数は

$$Y_t=z_tK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha}$$

とする．ここで H_t は労働投入である．技術ショックは１階のマルコフ過程に従う．

$$\log(z_t)=\rho_z\log(z_{t-1})+\varepsilon_z^t,\ \ \varepsilon_t^z\sim iid\ N(0,\sigma_z^2)$$

資本ストックの運動式は

$$K_{t+1}=(1-\delta)+I_t$$

である．企業の利潤最大化条件から

$$w_t=(1-\alpha)z_tK_t^{\alpha}H_t^{-\alpha}$$

$$r_t=\alpha z_tK_t^{\alpha-1}H_t^{1-\alpha}$$

が成り立つ．ここで w_t は実質賃金で r_t は資本レントである．便宜上，名目変数を貨幣ストック

で割って基準化する．つまり $\hat{p}_t = p_t/M_t$，$\hat{m}_t = m_t/M_t$ とする．これらの変数を使うと現金制約は

$$\hat{p}_t c_t = \frac{\hat{m}_{t-1} + (g_t - 1)}{g_t}$$

予算制約は

$$c_t + k_{t+1} + \frac{\hat{m}_t}{\hat{p}_t} = w_t h_t + r_t k_t + (1-\delta)k_t + \frac{\hat{m}_{t-1} + (g_t - 1)}{g_t \hat{p}_t}$$

と表される．効用最大化の条件からつぎの式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_t} &= \lambda_t + \eta_t \\
\gamma &= \lambda_t (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} H_t^{-\alpha} \\
\lambda_t &= \beta E_t [\lambda_{t+1} (\alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} H_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)] \\
\frac{\lambda_t}{\hat{p}_t} &= \beta E_t \frac{\lambda_{t+1} + \eta_{t+1}}{g_{t+1} \hat{p}_{t+1}} \\
k_{t+1} + \frac{\hat{m}_t}{\hat{p}_t} &= (1-\delta) k_t + w_t h_t + r_t k_t \\
\hat{p}_t c_t &= \frac{\hat{m}_{t-1} + (g_t - 1)}{g_t}
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで λ_t と η_t はラグランジュ乗数である．市場均衡条件は

$$\begin{aligned}
C_t &= c_t \\
H_t &= h_t \\
K_{t+1} &= k_{t+1} \\
\hat{m}_t &= 1
\end{aligned}$$

はじめに $z=1$，$g=\mu$ とおいて長期均衡値を求めると

$$\begin{aligned}
r^* &= \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \\
w^* &= (1-\alpha)\left(\frac{r^*}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
C^* &= \frac{\beta w^*}{\mu \gamma} \\
\hat{p}^* &= \frac{1}{C^*} \\
K^* &= \frac{C^*}{\frac{r^*}{\alpha} - \delta} \\
H^* &= \left(\frac{r^*}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K^* \\
Y^* &= C^* + \delta K^*
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．このモデルで貨幣は長期的に実質効果をもつ．つまり μ が増加するとインフレ率は上昇して消費，投資，労働供給，資本ストック，実質貨幣残高は減少する．インフレで貨幣の購買力

が低下すると，家計は消費を減らして余暇を増やすからである．

つぎに短期的な変動を分析するには（3.14）を数値的に解かなければならない． 1番目と 4，6 番目の式から

$$\lambda_t C_t = \beta E_t \frac{1}{g_{t+1}}$$
$$\eta_t C_t = 1 - \beta E_t \frac{1}{g_{t+1}} \tag{16}$$

が成り立つ．貨幣増加率は対数正規分布にしたがい，$E_t(1/g_{t+1})$ は g_t の関数となる．ところが線形近似法はこの点を考慮しないので誤差が大きくなる．３番目の式の期待値は近似式で表す必要がある．右辺は状態変数の関数であり

$$\lambda_t = \Phi(k_t, z_t, g_t) \tag{17}$$

と表される．この関数の係数が決まるとモデルは簡単に解ける．つまり λ_t を(16)に代入すると C_t と η_t がわかる．(14)の２番目の式から労働供給が求められる．現金制約から物価水準を求めて予算制約に代入すると来期の資本ストックが決まる．モデルのパラメータは $\beta=0.99$，$\delta=0.025$，$\alpha=0.36$，$\gamma=2.5805$，$\rho_z=0.95$，$\sigma_z=0.00721$とする．これらの値を(15)に代入すると

$$r^* = 0.0351$$
$$w^* = 2.3706$$
$$C^* = \frac{0.9095}{\mu}$$
$$p^* = 1.0995\mu$$
$$K^* = \frac{12.544}{\mu}$$
$$H^* = \frac{0.3302}{\mu}$$
$$Y^* = \frac{1.2231}{\mu}$$

となる．定常状態における家計の効用は

$$U^* = -9.486 - 100\log(\mu) - \frac{85.208}{\mu}$$

で与えられる．現金制約を無視すると，$\mu^*=0.85208$のときに効用は最大となる．実際には $\mu \geq \beta$ の制約があり，$\mu=\beta$ のときに効用は最も高くなる．このとき $\eta_t=0$であり，現金制約は無効で貨幣と資本の収益率は等しくなる．したがってフリードマンルールの下では現金制約は無効となる．

PEA のアルゴリズムを適用すると，(17)の係数が得られる（表１を参照）．貨幣ショックの分散は期待係数に影響するが，貨幣ショックそのものの影響はない．例えば $\sigma_g=0.0086$，$\mu=0.99$ならば

表 1 期待関数の係数（σ_g＝0.0086のケース）

状態変数	μ=0.99	μ=1.20	μ=1.40
constant	1.4482	1.3449	1.3019
$\log(k_t)$	−0.5370	−0.5370	−0.5370
$\log(z_t)$	−0.4539	−0.4546	−0.4549
$\log(k_t)\log(z_t)$	−0.0035	−0.0035	−0.0035
$\log(z_t)^2$	−0.0313	−0.0313	−0.0314

表 2 期待関数の係数（σ_g＝0.0172のケース）

状態変数	μ=0.99	M=1.2	μ=1.4
constant	1.4499	1.3465	1.2636
$\log(k_t)$	−0.5376	−0.5376	−0.5376
$\log(z_t)$	−0.5020	−0.4991	−0.4968
$\log(k_t)\log(z_t)$	0.0150	0.0150	0.0150
$\log(z_t)^2$	−0.0673	−0.0673	−0.0673

$$\log(\lambda_t)=1.4482-0.5370\log(k_t)-0.4539\log(z_t)-0.0035\log(k_t)\log(z_t)$$
$$-0.0313\log(z_t)^2$$

となる[5)]．もし $z_t=1$であれば

$$c_t=0.2350k_t^{0.5370}$$

となり資本が増加すれば消費は拡大する．また正の技術ショックも消費を増加させる．貨幣増加率が高くなると現金制約が効いてくるが，定数項を除いて係数はほとんど変わらない．表 2 は貨幣の変動を 2 倍にしたときの係数値である．一つの係数を除いて大きな変化は見られない．貨幣ショックは景気変動に強い影響を与えないのではじめから予想された結果である．

実物的モデルに比べて貨幣モデルの分析は簡単ではないが, PEA 法を適用すれば精度の高い解が得られる．貨幣ショックの期待値は厳密に計算できるので，状態変数の関数で近似する必要はない．このため，貨幣を考慮してもモデルの基本的な構造は変わらない．

8．むすび

ここで取り上げたいくつかの例から明らかなように, PEA 法は多くのモデルに適用可能であり計算も比較的簡単である．また現金制約のような制約条件を考慮することも難しくない．

PEA 法は期待形成を考慮した独特のアプローチであり, 数値解析の方法としてユニークな特徴を具えている．以下の点を改善すれば，今後さらに多くのモデルに適用されるであろう．第一に，回帰推定における内部相関の問題がある．内部相関が強いと推定結果は不安定となり場合によっては計算は途中で停止する．この問題を解決するにはニューラルネットワークが有効である．Duffy＝McNelis (2001) が示したように，ニューラルネットを用いると内部相関はほとんど発生しない．また少数の説明変数でも高精度の解が得られる．

第二に，適当な初期値を設定する問題がある．この問題にはホモトピー法が有効である．ホモ

トピー法の考えを応用して，解析解のあるケースから始めて初期値を微調整すれば反復計算は収束しやすくなる．PEA と線形近似法を組み合わせた方法も有効であるかもしれない．つまり線形近似法でモデルの解を求めた後，計算機でデータを発生させて期待係数の初期値を求める方法である．この方法を使うと初期値を効率的に探すことができるが，追加的な計算が必要である．

［脚注］

1）Marcet（1988），Den Haan and Marcet（1990），Marcet and Lorenzoni（1998）を参照．Duffy＝McNelis（2001）は，確率的成長モデルに PEA とニューラルネットワークや遺伝的アルゴリズムを適用して近似精度を比較している．

2）ホモトピー法については Judd（1988）179-187を参照せよ．

3）動的計画法を適用すると，ベルマン方程式は

$$\nu(k_t, z_t) = \max_{c_t}[\log(c_t) + \beta E_t \nu(k_{t+1}, z_{t+1})]$$

$$\nu(k_t, z_t) = A + B\log(k_t) + C\log(z_t)$$

$$A = \left[\log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta\log(\alpha\beta)}{1-\alpha\beta}\right](1-\beta)^{-1},\ B = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

$$C = \frac{1}{1-\alpha\beta}$$

と書ける．最適消費を求めて右辺に代入すると

$$\log(z_t k_t^{\alpha} - k_{t+1}) + \beta E_t[A + B\log(k_{t+1}) + C\log(z_{t+1})]$$

これを k_{t+1} で微分してゼロとおくと，最適資本ストックは

$$k_{t+1} = \left(\frac{\beta B}{1+\beta B}\right) z_t k_t^{\alpha}$$

で与えられる．

4）(12)に含まれる二つの期待値を別々に推計すると方法は効率的ではない．

5）変数間の内部相関を減らすために $\log(k_t)^2$ は除いている．

［参考文献］

［１］ Cooley, T. and G. Hanse (1989), "The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model," *American Economic Review*, 79 : 733-748.

［２］ Duffy, J., and P.D. McNelis (2001), "Approximating and simulating the stochastic growth model : Parameterized expectations, neural networks, and the genetic algorithm", *Journal of Economic Dynamics & Control*, 25 : 1273-1303.

［３］ Judd, K.L (1988), *Numerical Methods in Economics*, MIT Press.

［４］ Marcet, A. (1988), "Solving non-linear models by parameterizing expectations." Unpublished manuscript, Carnegie Mellon University, Graduate School of Industrial Administration.

［５］ Marcet, A., and G.. Lorenzoni (1999), "The parameterized expectation approach : some practical issues." In *Computational Methods for Study of Dynamic Economies* (R. Marimon and A. Scott, eds.), Oxford University Press, New York, pp.143-171.

［６］ Mehra, R. and E. Prescott (1985), "The Equity Premium : A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, 15 : 145-161.